



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
(МИНОБРНАУКИ РОССИИ)  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ДАГЕСТАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**



"Утверждаю"

Председатель ДФИЦ РАН

А.К. Муртазаев

\_\_\_\_\_ 2021 г.

**Рабочая программа дисциплины  
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»  
по направлению подготовки: 01.06.01 – Математика и механика**

Уровень образования:

Подготовка кадров высшей квалификации (аспирантура)

Квалификация (степень) выпускника:

«Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Статус дисциплины: вариативная часть обязательных дисциплин

**Махачкала 2021**

Рабочая программа дисциплины составлена в 2021 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.06.01 – Математика и механика, квалификация выпускника: «Исследователь. Преподаватель-исследователь».

Разработчики: отдел математики и информатики,

Шарапудинов Т.И. – кандидат физико-математических наук, врио зав. отделом математики и информатики ДФИЦ РАН.

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании Объединенного Ученого совета 2/4, от 24.02. 2021 г., протокол № 2/4

Согласовано:

Зам. председателя по науке



А.Б. Биарсланов

Зав. отделом аспирантуры



Д.К. Сфиева

## Аннотация

Дисциплина относится к вариативной части блока 1 дисциплин (обязательные дисциплины). Изучение дисциплины определено направленностью программы аспирантуры «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с основными разделами теории функций вещественного переменного, теории функций комплексного переменного и функционального анализа.

Дисциплина нацелена на формирование компетенций выпускника аспирантуры: УК-5, ОПК-2, ПК-1, ПК-2.

### 1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям обучающегося в аспирантуре по направлению подготовки кадров высшей квалификации и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, и обучающихся направления подготовки 01.06.01 Математика и механика, изучающих *Дисциплину научной специальности*.

Программа разработана в соответствии с:

- Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 01.06.01 – Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации), утвержденным приказом Минобрнауки РФ от 30 июля 2014 г. № 866;
- Образовательной программой 01.06.01 Математика и механика (уровень подготовки кадров высшей квалификации);
- Учебным планом по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, утвержденным в 2018 г.

Объем дисциплины 5 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Семестр	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации
	в том числе						
	Контактная работа обучающихся с преподавателем					СРС, в том числе экзамен	
	Всего	из них					
Лекции		Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	Консультации		
2, 3к	36	36				144	экзамен

### Цели и задачи освоения дисциплины:

Цель дисциплины – формирование у аспирантов углубленных профессиональных знаний в областях теории функций вещественного переменного, теории функций комплексного переменного и функционального анализа.

Задачи дисциплины:

*Знать* основные понятия и теоремы теории функций вещественного переменного, теории функций комплексного переменного и функционального анализа.

*Уметь* решать задачи: связанные с мерой, производными и различными видами интегралов; на исследование функциональных рядов; на аналитические функции и их приложения; связанные с топологией, метрикой, нормой.

*Владеть* основными методами вещественного, комплексного и функционального анализа.

## **2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре**

В результате освоения программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине (модулю):

<i><b>Коды компетенции</b></i>	<b>Результаты освоения ОПОП</b> <i>Содержание компетенций</i>	<b>Перечь планируемых результатов обучения по дисциплине</b>
УК-5	Обладать способностью планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития	Знать основные понятия и теоремы теории функций вещественного переменного, теории функций комплексного переменного и функционального анализа с тем, чтобы использовать не только основную, но и дополнительную литературу по современному анализу. Уметь: обобщать теоремы современного анализа и давать их сравнительный анализ с другими смежными вопросами; пользоваться не только лекционным материалом и учебниками по теории функций вещественного переменного, теории функций комплексного переменного и функционального анализа, но и научными изданиями, интернет-ресурсом. Владеть современными информационными технологиями при изучении свойств функций, при исследовании рядов и интегралов, при исследовании рядов и интегралов, при решении других задач современного анализа, при изучении их приложений в самой математике и естественнонаучных дисциплинах.
ОПК-2	Обладать готовностью к преподавательской деятельности по основным образовательным	Знать на достаточно высоком уровне вопросы теории функций вещественного переменного, теории функций комплексного переменного и функционального анализа по основным

	программам высшего образования	образовательным программам данной образовательной организации. Уметь: оценивать объем материала, необходимого для освоения того или иного программного вопроса; устанавливать связи между различными предметными разделами с учетом специфики математики. Владеть методикой изложения основного материала того или другого раздела теории функций вещественного переменного, теории функций комплексного переменного и функционального анализа по программе данной образовательной организации.
ПК-1	Обладать фундаментальными знаниями в области вещественного анализа, комплексного анализа, функционального анализа, дифференциальных уравнений	Знать: основные понятия и формулировки основных теорем из области современного анализа, включая различные виды метрик, различные аппараты приближения, различные виды сходимости последовательностей функций и условия их сходимости. Уметь: применять основные теоремы современного анализа для решения задач в области самой математики и естественнонаучных дисциплин. Владеть важнейшими методами современного анализа для применения в области своей научно-исследовательской деятельности.
ПК-2	Обладать способностью строго показывать математическое утверждение, сформулировать и анализировать научный результат	Знать точные определения основных понятий и строгие формулировки основных теорем современного анализа. Уметь проводить логически точные математические рассуждения при доказательстве теорем современного анализа, строго соблюдая при этом причинно-следственные связи. Владеть классическими методами доказательства основных принципов анализа и важнейших теорем современного анализа.

В результате изучения дисциплины обучающийся осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
-------------	-------------	---	---

Универсальные	УК-5	<p>Знает понятия определения и утверждения, составляющие основы современного анализа, что позволяет использовать в научных исследованиях как основную литературу, так и дополнительные научные издания.</p> <p>Умеет выявлять общие признаки и получать более общие теоремы в области своих научных исследований; анализировать с точки зрения существенности: необходимости и достаточности полученных условий истинности доказываемое утверждение; свободно пользоваться научными изданиями, интернет-ресурсом.</p> <p>Владеет навыками использования современных информационных технологий в исследованиях в области современного анализа и при изучении приложений в других областях науки.</p>	Последовательное изучение тем по модулям в сочетании со сдачей коллоквиумов по каждому модулю
Общепрофессиональные	ОПК-2	<p>Знает материал по разделам теории функций вещественного переменного, теории функций комплексного переменного и функционального анализа, необходимый для преподавания этих дисциплин на уровне основных образовательных программ данной образовательной организации.</p> <p>Умеет: выбирать необходимый материал для освоения программы учебной дисциплины; устанавливать межпредметные связи.</p> <p>Владеет навыками изложения основных</p>	Последовательное изучение тем по модулям в сочетании со сдачей коллоквиумов по каждому модулю

		разделов теории функций вещественного переменного, теории функций комплексного переменного и функционального анализа по программе данной образовательной организации.	
Профессиональные	ПК-1	<p>Знает в достаточном объеме базовый материал по курсам вещественного, комплексного и функционального анализа.</p> <p>Умеет: применять основные методы современного анализа для научных исследований в области самой математики и в приложениях.</p> <p>Владеет навыками научных исследований в области современного анализа и базовыми методами теории функций вещественного, комплексного и функционального анализа.</p>	Последовательное изучение тем по модулям в сочетании со сдачей коллоквиумов по каждому модулю
	ПК-2	<p>Знает строгие определения основных понятий и полные формулировки важнейших достижений на современном этапе в областях теории функций вещественного, комплексного и функционального анализа.</p> <p>Умеет проводить логически корректные математические рассуждения при доказательстве основных теорем современного анализа.</p> <p>Владеет классическими и современными методами доказательства важнейших теорем из области современного анализа.</p>	Последовательное изучение тем по модулям в сочетании со сдачей коллоквиумов по каждому модулю

### 3. Место дисциплины в структуре ОПОП

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах, прохождения практик:

- Ортогональные системы функций

- Элементы теории приближений
- Экстремальные задачи теории приближения
- Некоторые вопросы теории интерполирования функций
- Педагогическая практика
- Научно-исследовательская деятельность
- Подготовка научно-квалификационной работы

Для освоения учебной дисциплины, обучающиеся должны владеть хорошими знаниями основ классических университетских курсов математического анализа, дифференциальных уравнений, комплексного анализа, функционального анализа и компетенциями: УК – 5; ОПК – 2; ПК – 1; ПК – 2.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих за ней дисциплин:

- Научно-исследовательская деятельность
- Подготовка научно-квалификационной работы
- Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена
- Представление научного доклада об основных результатах подготовленной научно-квалификационной работы

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

4.1. Объем дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 академических часов.

4.2. Структура дисциплины:

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	практ. занятия	лабор. работы	контр. сам. раб.		
<b>Модуль 1. Мера, производная и интеграл</b>								
<b>Всего по модулю 1</b>	<b>2к</b>		<b>6</b>				<b>30</b>	КОЛЛОКВИУМ
1. Меры, измеримые функции, интеграл			3					
2. Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования			3					
<b>Модуль 2. Ряды функций</b>								
<b>Всего по модулю 2</b>	<b>2к</b>		<b>6</b>				<b>30</b>	КОЛЛОКВИУМ
1. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды			3					
2. Тригонометрические			3					



ряды. Преобразование Фурье								
<b>Модуль 3. Комплексный анализ</b>								
<b>Всего по модулю 3</b>	<b>2к</b>		<b>12</b>				<b>24</b>	КОЛЛОКВИУМ
1. Интегральные представления аналитических функций			4					
2. Ряды аналитических функций. Вычеты			4					
3. Конформные отображения			2					
4. Гармонические функции			2					
<b>Модуль 4. Функциональный анализ</b>								
<b>Всего по модулю 4</b>	<b>2к</b>		<b>12</b>				<b>24</b>	КОЛЛОКВИУМ
1. Метрические и топологические пространства			2					
2. Нормированные и топологические линейные пространства			2					
3. Линейные функционалы и линейные операторы			2					
4. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них			2					
5. Дифференциальное исчисление в линейных пространствах			2					
6. Обобщенные функции			2					
<b>Модуль 5. Промежуточная аттестация</b>								
Экзамен	3к							экзамен
<b>ИТОГО</b>			<b>36</b>				<b>108</b>	<b>36</b>

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

### **ЛЕКЦИИ**

#### **Модуль 1. Мера, производная и интеграл**

*Тема 1. Меры, измеримые функции, интеграл*

Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини. ([1], гл. V; [Д1], гл. 1–4)

#### *Тема 2. Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования*

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона-Никодима. Интеграл Стильтьеса. ([1], гл. VI; [Д1], гл. 5)

### **Модуль 2. Ряды функций**

#### *Тема 3. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды*

Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства  $L_p$ , их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в  $L_2$  и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы. ([1], гл. VII; [5], гл. VII)

#### *Тема 4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье*

Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье-Стилтьеса. ([1], гл. VIII, §§ 1–7)

### **Модуль 3. Комплексный анализ**

#### *Тема 5. Интегральные представления аналитических функций*

Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого. ([5], гл. IV)

#### *Тема 6. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты*

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами. ([5], гл. V–VII)

#### *Тема 7. Конформные отображения*

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолиственности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях. ([5], гл. III, § 1, 3, гл. XII, §§ 1, 2, 6, 7)

#### *Тема 8. Гармонические функции*

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Бесконечная дифференцируемость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга. ([6])

#### **Модуль 4. Функциональный анализ**

##### *Тема 9. Метрические и топологические пространства*

Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах. ([1], гл. II)

##### *Тема 10. Нормированные и топологические пространства*

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Бахана-Хана. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах  $C$  и  $L_p$ . Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства. ([1], гл. III)

##### *Тема 11. Линейные функционалы и линейные операторы*

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма. ([1], гл. IV, §§ 1–3, 5, 6)

##### *Тема 12. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них*

Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы. ([8], гл. VI–VIII)

##### *Тема 13. Дифференциальное исчисление в линейных пространствах*

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона. ([1], гл. X)

##### *Тема 14. Обобщенные функции*

Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем. ([1], гл. IV, § 4, гл. VII, § 8; [7], гл. II)

### **5. Оценочные средства для текущего контроля и аттестации обучающегося**

#### **Тематика заданий текущего контроля**

*Примерный перечень тем к коллоквиуму*

- Тема 1. Меры, измеримые функции, интеграл*
- Тема 2. Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования*
- Тема 3. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды*
- Тема 4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье*
- Тема 5. Интегральные представления аналитических функций*
- Тема 6. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты*
- Тема 7. Конформные отображения*
- Тема 8. Гармонические функции*
- Тема 9. Метрические и топологические пространства*
- Тема 10. Нормированные и топологические линейные пространства*
- Тема 11. Линейные функционалы и линейные операторы*
- Тема 12. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них*
- Тема 13. Дифференциальное исчисление в линейных пространствах*
- Тема 14. Обобщенные функции*

## **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **6.1. Основная литература**

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа – Москва: Физматлит, 2012  
Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 7-е изд. – Москва: Физматлит, 2012. – 573 с. – (Классический университетский учебник). – ISBN 978-5-9221-0266-7; то же [Электронный ресурс]. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563>.
2. Натансон И. П. Теория функций вещественных переменных: учебное пособие – Москва: Наука, 1974  
Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной: учебное пособие / И. П. Натансон. – Изд. 3-е. – Москва: Наука, 1974. – 480 с.: ил.; то же [Электронный ресурс]. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459802>.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 3 – Москва: Физматлит, 2002  
Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х т. / Г. М. Фихтенгольц; ред. А. А. Флоринского. – Изд. 6-е (1-е изд. – 1949 г.). – Москва: Физматлит, 2002. – Т. 3. – 727 с. – ISBN 5-9221-0155-2; то же [Электронный ресурс]. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83196>.
4. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. II. М.: Наука, 1975 (Физматлит, 2001).
5. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977 (Лань, 2009).

6. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1976 (Физматлит, 2004).
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976 (1981).
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1976.

## **6.2. Дополнительная литература**

Д1. Действительный анализ в задачах: учебное пособие – Москва: Физматлит, 2005  
Действительный анализ в задачах: учебное пособие / П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко и др. – Москва: Физматлит, 2005. – 416 с. – ISBN 5-9221-0595-7; то же [Электронный ресурс]. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69331>.

Д2. Евграфов М. А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991.

Д3. Зорич В. А. Математический анализ. Т. II. М.: Наука, 1984.

Д4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

## **6.3. Программное обеспечение**

Для успешного освоения дисциплины, обучающийся использует следующие программные средства:

- MatLab
- Mathcad
- Maple

## **6.4. Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы**

1. <http://elibrary.ru> – eLIBRARY – Научная электронная библиотека
2. [http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rubr=2.2.74.12](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12) – Единое окно доступа к электронным ресурсам
3. <http://springerlink.com/mathematics-and-statistics/> - платформа ресурсов издательства Springer

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Для проведения занятий в активной и интерактивной форме и самостоятельной работы аспирантов используются компьютеры с соответствующим программным обеспечением, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны, аудио и видео аппаратура.

## **8. Образовательные технологии**

В соответствии с различными видами учебных занятий предусматриваются следующие образовательные технологии:

- традиционные и интерактивные лекции с дискурсивной практикой обучения;
- семинары и коллоквиумы, на которых обсуждаются основные проблемы, освещенные в лекциях и сформулированные в домашних заданиях;

- письменные и устные домашние задания, подготовка докладов и рефератов по программе самостоятельной работы;
- участие в научно-методологических семинарах, коллоквиумах и конференциях;
- консультации преподавателя;
- самостоятельная работа аспиранта, в которую входит освоение теоретического материала, подготовка к семинарским занятиям с использованием интернета и электронных библиотек.